# الوحدة 3: التفاضل

## 3-1 المماسات والسرعة المتجهة

نواتج التعلم

الأهداف



| ناتج التعلم | الطريقة المقترحة لتغطية الناتج | | |
|---|---|---|---|
| | تعليم مدرسي | تعليم الكتروني | تعلم ذاتي |
| 1- الربط بين ميل القاطع وميل المماس وتفسيرهم | √ | √ | |
| 2- كتابة معادلة المماس لمنحنى عند نقطة معطاة باستخدام النهايات | √ | √ | |
| إيجاد السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية عند نقطة معطاة | √ | √ | |
| حل مسائل رياضية وحياتية باستخدام المشتقات | √ | √ | |

عنوان الدرس: المماسات والسرعة المتجهة.



+971566151988/

أ/ محمد طه

* السرعة السالبة تعكس الاتجاه

اتجاه السرعة لأسفل

**2021 – 2022**

| The function $h(t) = 10t^2 - 24t$ represents the height of an object , calculate velocity and aceleration at $t = 1$ | تمثل الدالة $h(t) = 10t^2 - 24t$ ارتفاع جسم ما احسب السرعة المتجهة و التسارع عند الزمن $t = 1$ |
|---|---|

ⓐ $v(1) = -4 , a(1) = -20$
ⓑ $v(1) = 4 , a(1) = -20$
ⓒ $v(1) = -4 , a(1) = 20$
ⓓ $v(1) = 4 , a(1) = 20$

**2022 – 2023**

| Suppose that the height of a falling object $t$ second after being dropped from a height 64 ft is given by $s(t) = 64 - 16t^2$ ft Find the average velocity between $t = 1$ and $t = 2$ | علي فرض أن ارتفاع جسم يسقط بعد t ثانية من سقوطه من ارتفاع 64 ft ، تمثله المعادلة $s(t) = 64 - 16t^2$ ، أوجد السرعة المتجهة المتوسطة بين الزمنين $t = 1$ و $t = 2$ |
|---|---|

ⓐ $-24\ ft/s$
ⓑ $-6\ ft/s$
ⓒ $-36\ ft/s$
ⓓ $-48\ ft/s$

Saturday, October 5, 2024

عنوان الدرس : المماسات و السرعة المتجهة.

**2017 – 2018**

| Find the average velocity for given positiosn function $s(t) = \sqrt{t^2 + 8t}$ between $t = 0$ and $t = 1$ , where S in meters and t in seconds | أوجد السرعة المتجهة المتوسطة لدالة الموقع $s(t) = \sqrt{t^2 + 8t}$ بين $t = 0$ و $t = 1$ حيث $S$ بالامتار و $t$ بالثواني |
|---|---|

ⓐ $y = \frac{5}{3}\, m/s$ ⓑ $3\, m/s$ ⓒ $0\, m/s$ ⓓ $-3\, m/s$

نواتج التعلم : حل مسائل رياضية وحياتية باستخدام المشتقات

مثال ٦. ١

## تفسير معدلات التغيير

إذا كانت الدالة $f(t)$ تمثل تعداد سكان مدينة ما بملايين الأشخاص بعد $t$ أعوام من الأول من يناير عام 2000
فسر كلا من الكميات التالية بافتراض أنها تساوي الأعداد المعلومة .

$(a)\ \frac{f(2)-f(0)}{2} = 0.34$ , $(b)\ f(2)-f(1) = 0.31$ , $(c)\ \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 0.3$

الحل

- بما ان $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ هو متوسط معدل تغير دالة $f$ بين $a$ و $b$ فالتعبير (a) يخبرنا أن متوسط معدل التغير للدالة $f$ بين $a = 0$ و$b =$٢ هو ٠,٣٤ وهذا يعني نمو التعداد السكاني للمدينة بمعدل متوسط ٠,٣٤ مليون نسمة لكل عام بين ٢٠٠٠ و٢٠٠٢.
- التعبير (b) هو متوسط معدل التغيير بين $a = 1$ و$b =$٢ مما يشير الي نمو التعداد السكاني بمعدل متوسط ٠,٣١ مليون نسمة علي اساس سنوي ٢٠٠١ .
- واخيرا التعبير $(c)$ يمثل معدل التغير اللحظي لتعداد لسكان في الزمن $t = 2$ اعتبارا من الاول من يناير ٢٠٠٢ . كان التعداد السكانى فى المدينة ينمو بمعدل ٠,٣ مليون نسمة لكل عام

# تفسير معدلات التغيير

علي فرض أن $f(t)$ تمثل الرصيد بالدرهم في حساب بنكي بعد $t$ أعوام من الأول من يناير عام ٢٠٠٠ فسر كل من الكميات الأتية بافتراض أنها تساوي الأعداد المعلومة.

(a) $\frac{f(4)-f(2)}{2} = 21{,}034$

$(b)\ 2[f(4) - f(3.5)] = 25.036$

$(c)\ \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = 30.000$

**Example:** 1.5 Page: 138

The height of a falling object $t$ seconds after being dropped from height of $64ft$ is:

$$s(t) = 64 - 16t^2$$

Find:
1. Average velocity between: a. $t = 1$ and $t = 2$ $\quad$ $b. t = 1.5$ and $t = 2$ $\quad$ $c. t = 1.9$ and $t = 2$
2. Instantaneous velocity at $t = 2$

**Solution:**

$$v_{avg} = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$$

a. Average velocity between $t = 1$ and $t = 2$

$$v_{avg} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{(64 - 16(2)^2) - (64 - 16(1)^2)}{2 - 1} = -48ft/s$$

b. Average velocity between $t = 1.5$ and $t = 2$

$$v_{avg} = \frac{s(2) - s(1.5)}{2 - 1}$$

$$= \frac{(64 - 16(2)^2) - (64 - 16(1.5)^2)}{2 - 1.5} = -56ft/s$$

c. Average velocity between $t = 1.9$ and $t = 2$

$$v_{avg} = \frac{s(2) - s(1.9)}{2 - 1.9}$$

$$= \frac{(64 - 16(2)^2) - (64 - 16(1.9)^2)}{2 - 1.9} = -62.4ft/s$$

+٩٧١٥٠٦٦١٥١٩٨٨/

أ/ محمد طه

**Example:** 1.5 Page: 138

The height of a falling object $t$ seconds after being dropped from height of $64ft$ is:

$$s(t) = 64 - 16t^2$$

Find: 2. Instantaneous velocity at $t = 2$

**Solution:** $v(a) = \lim_{h\to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$

$$v(2) = \lim_{h\to 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[64 - 16(2+h)^2] - [64 - 16(2)^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{64 - 16(4 + 4h + h^2) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{64 - 64 - 64h - 16h^2}{h}$$

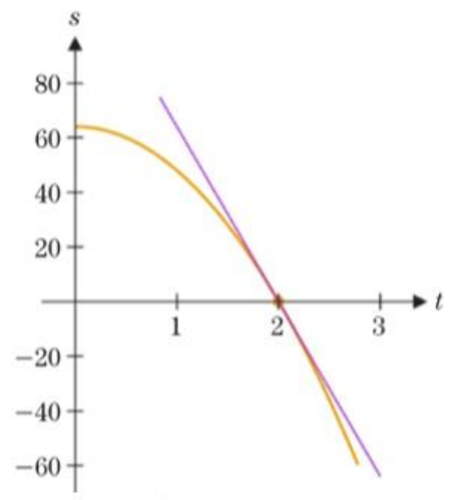
$$= \lim_{h\to 0} \frac{-64h - 16h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(-64 - 16h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (-64 - 16h)$$

$$v(2) = -64 - 16(0)$$

$$v(2) = -64ft/s$$



Tangent line at $t = 2$

# الدرس: 3.3

## اسم الدرس: حساب المشتقات: قاعدة القوة.

☺ نواتج التعلم:

- ايجاد مشتقة دالة باستخدام قاعدة القوى عند نقطة معينة.
- ايجاد المشتقات ذات الرتب العليا للدالة.
- استخدم قواعد الاشتقاق والمشتقات العليا في حل مشاكل الحياة اليومية.

# حساب تسارع لاعب القفز الحر

مثال

علي فرض ان ارتفاع لاعب القفز الحر بعد t ثانية من القفز من الطائرة يعطي من خلال العلاقة $f(t) = 640 - 20t - 16t^2$ قدم . أوجد تسارع ذلك الشخص عند الزمن $t$

الحل

الارتفاع

$$f(t) = 640 - 20t - 16t^2 \quad ft$$

السرعة

$$v(t) = f'(t) = -20 - 32t \quad ft/s$$

العجلة

$$a(t) = v'(t) = f''(t) = -32 \quad ft/s^2$$

# استكشاف معدل تغير الايراد

**مثال**

افترض أن سعر مبيع أحد المنتجات في الوقت الحالي يساوي AED25، مع زيادة في السعر بمعدل AED2 في العام. وعند السعر الحالي يشتري المستهلكون 150 ألف قطعة ولكن العدد المبيع يتناقص بمعدّل 8 آلاف قطعة في العام. فما معدّل تغيّر الإيراد الإجمالي؟ وهل يتزايد الإيراد الإجمالي أم يتناقص ؟

ملحوظة: معدل تغير الزيادة في السعر P(t) هو

$$P'(t) = \frac{dP}{dt}$$

المطلوب: معدل تغير الايراد الحالي

**الحل**

المعطيات:

السعر الحالي: $P(0) = AED25$

معدل تغير السعر الحالي: $P'(0) =$ 2درهم/عام

عدد القطع الحالي: $Q(0) = 150$ ألف قطعة

معدل تغيرعدد القطع الحالي : $Q'(0) = -8$ ألف قطعة /عام

السعر × عدد القطع = الايراد

هذه المعادلة دالة في الزمن

$$R(t) = Q(t) \times P(t)$$

اشتقاق باستخدام قاعدة الضرب

$$R'(t) = Q'(t)P(t) + Q(t)P'(t)$$

$t = 0$

$$R'(0) = Q'(0)P(0) + Q(0)P'(0)$$

عوض بالقيم المعطاه

$$R'(0) = (-8)(25) + (150)(2)$$

$R'(0) = 100$ ألف درهم كل عام

الايراد الاجمالي يتزايد

+971566151988/

أ/ محمد طه

# استكشاف معدل تغير الايراد

امتحان 2017/2018

**مثال**

28. افترض أن سعر القطعة 14 AED وأنه قد بيعت 12,000 قطعة. تريد الشركة زيادة الكمية المبيعة بمقدار 1200 قطعة في العام مع زيادة الإيراد بمقدار 20,000 AED في العام. فما المعدل الذي يتعين زيادة السعر به لتحقيق هذين الهدفين؟

**الحل**

المطلوب: معدل تغير السعر

المعطيات:

السعر عند $t_0$

$P(t_0) = 14$ درهم

الكمية المباعة عند $t_0$

$Q(t_0) = 12{,}000$ قطعة

معدل التغير في عدد القطع المباعة عند $t_0$

$Q'(t_0) = 1200 unit/year$

معدل تغير في الايراد عند $t_0$

$R'(t_0) = 20{,}000$ درهم لكل عام

الايراد = عدد القطع × السعر

هذه المعادلة دالة في الزمن

$$R(t) = Q(t) \times P(t)$$

اشتقاق باستخدام قاعدة الضرب

$$R'(t) = Q'(t)P(t) + Q(t)P'(t)$$

نعوض بالقيم المعطاه

$$R'(t_0) = Q'(t_0)P(t_0) + Q(t_0)P'(t_0)$$

$$20{,}000 = (1200)(14) + (12{,}000)\, P'(t_0)$$

$$20{,}000 = 16{,}800 + (12{,}000)\, P'(t_0)$$

$$P'(t_0) = \frac{20{,}000 - 16{,}800}{12{,}000} = 0.266667$$ درهم لكل عام

*السعر يجب ان يزيد بمعدل 0.266667 درهم لكل عام لتحقيق الهدفين*

# استخدام الاشتقاق لتحليل ضربة كرة الجولف

**مثال**

ضربت كرة جولف كتلتها 0.05 kg بعصا كتلتها $mkg$ وسرعتها $50m/s$ فكانت سرعتها الابتدائية $u(m)=\frac{83m}{m+0.05}m/s$

❑ برهن أن $u'(m)>0$ وفسّر هذه النتيجة بدلالة المصطلحات المستخدمة في رياضة الجولف.

❑ قارن u'(0.15) و u'(0.20)

**الحل**

$$u(m)=\frac{83m}{m+0.05}\text{ m/s}$$

$$u'(m)=\frac{\left[\frac{d}{dm}(83m)\right](m+0.05)-(83m)\left[\frac{d}{dm}(m+0.05)\right]}{(m+0.05)^2}$$

$$u'(m)=\frac{83(m+0.05)-(83m)(1)}{(m+0.05)^2}$$

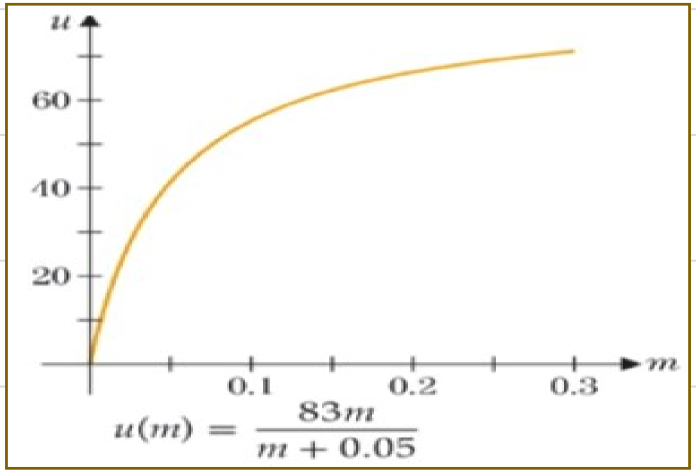
$$u'(m)=\frac{83m+4.15-83m}{(m+0.05)^2}$$

$$u'(m)=\frac{4.15}{(m+0.05)^2}$$

كلا من البسط والمقام موجب $u'(m)>0$ ;

$u(m)$ لديها ميل موجب $u(m)$ تتزايد.

كلما زادت كتلة المضرب زادت سرعة الكرة.




$$u'(0.15)=\frac{4.15}{(0.15+0.05)^2}=103.75$$

$$u'(0.20)=\frac{4.15}{(0.20+0.05)^2}=66.4$$

كلما كانت الكرة أثقل ، قل معدل زيادة سرعة الكرة.

# استخدام الاشتقاق لتحليل ضربة كرة الجولف

مثال

29. تضرب كرة البيسبول كتلتها 0.15Kg وسرعتها 45m/s بمضرب بيسبول كتلته m kg وبسرعة 40m/s (بعكس اتجاه حركة الكرة). بعد الاصطدام بلغت السرعة الابتدائية للكرة $u(m)\ \frac{82.5\,m-6.75}{m+0.15}$ m/s

- برهن أن $u'(m) > 0$ وفسّر ذلك وفق مصطلحات رياضة البيسبول.
- قارن $u'(1)$ و $u'(1.2)$

الحل

$$u(m) = \frac{82.5m-6.75}{m+0.15}\text{m/s}$$

$$u'(m) = \frac{\left[\frac{d}{dm}(82.5m-6.75)\right](m+0.15)-(82.5m-6.75)\left[\frac{d}{dm}(m+0.15)\right]}{(m+0.15)^2}$$

$$u'(m) = \frac{82.5(m+0.15)-(82.5m-6.75)(1)}{(m+0.15)^2}$$

$$u'(m) = \frac{82.5m+12.375-82.5m+6.75}{(m+0.15)^2} \quad u'(m) = \frac{19.125}{(m+0.15)^2}$$

كلا من البسط والمقام موجب $u'(m) > 0$ ;

$u(m)$ لديها ميل موجب $u(m)$, تتزايد.

كلما زادت كتلة المضرب زادت سرعة الكرة.

$$u'(1) = \frac{19.125}{(1+0.15)^2} = 14.46$$

$$u'(1.2) = \frac{19.125}{(1.2+0.15)^2} = 10.49$$

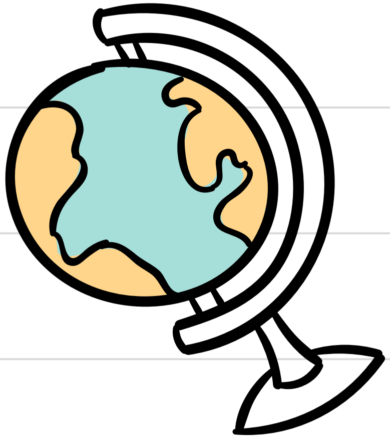
كلما كانت الكرة أثقل ، قل معدل زيادة سرعة الكرة.

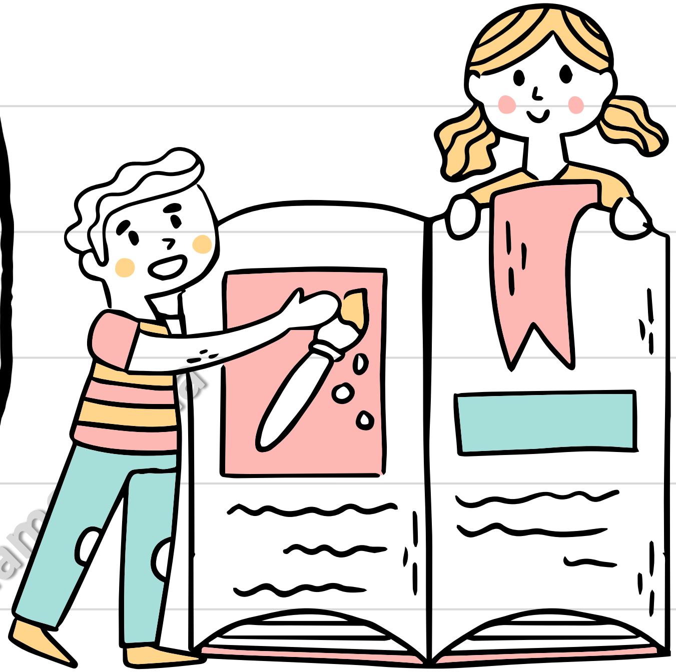
# الوحدة الثالثة
## الاشتقاق

الدرس ٦.٣

اسم الدرس

مشتقات الدوال المثلثية





مثال

6.6 Page: 184

لنفترض أن u(t) يقيس الإزاحة ( المقيسة بالبوصة ) لكتلة معلقة من زنبرك لمدة t ثانية بعد تحريرها وأن

$$u(t) = 4cos2t$$

أوجد السرعة المتجهة فى أي زمن $t$ وحدد أقصى سرعة متجهة . ما الموقع عندما يصل لاقصى سرعة له؟

الحل

الإزاحة $u(t) = 4cos2t$

السرعة: $v(t) = u'(t) = 4(-sin2t)(2)$

$$\boxed{v(t) = -8sin2t}$$

أقصى سرعة للزنبرك

$$-1 \le sin2t \le 1$$

$$8 \ge -8sin2t \ge -8$$

$$-8 \le v(t) \le 8$$

أقصى سرعة للزنبرك = ٨

$$-8sin2t = 8$$

$$sin2t = -1$$

$$2t = \frac{-\pi}{2} + 2\,n\pi:$$ n عدد صحيح موجب

$$\boxed{t = \frac{-\pi}{4} + n\pi}$$

$$\mathbf{n = 0.1, 2, 3, \dots \dots \dots}$$

عند $\mathbf{t = \frac{-\pi}{4} + n\pi,}$ $\mathbf{u(t) = 0}$

لذلك فان الزنبرك يتحرك باقصى سرعة عندما يمر بموضع إتزانه.

مثال

**Q31 Page: 185**

يهتز زنبرك معلق من السقف إلى أعلى و إلى أسفل. وقد حدد موقعه الرأسي في الزمن t باستخدام :

$$f(t) = 4sin3t$$

أوجد السرعة المتجهة للزنبرك في الزمن t. *ما أقصى سرعة للزنبرك . ما الموقع عندما يصل لاقصى سرعة له .*

الحل

الإزاحة

$$f(t) = 4sin3t$$

السرعة:

$$v(t) = u'(t) = 4(cos3t)(3)$$

$$\boxed{v(t) = 12cos3t}$$

أقصى سرعة للزنبرك

$$-1 \le cos3t \le 1$$

$$-12 \le 12cos3t \le 12$$

$$-12 \le v(t) \le 12$$

$$\boxed{\text{أقصى سرعة للزنبرك} = 12}$$

$$12cos3t = 12$$

$$cos3t = 1$$

$\mathbf{3t = 0 + 2n\pi}$ : n عدد صحيح موجب

$$t = 0 + \frac{2n\pi}{3} \text{ then } \boxed{t = \frac{2n\pi}{3}}$$

$$n = 0.1, 2, 3, \dots \dots \dots$$

الموقع عندما يصل الزنبرك لأقصى سرعة

$$\boxed{t = \frac{2n\pi}{3} \quad \text{عند} \quad f(t) = 4sin3t = 0}$$

*لذلك فان الزنبرك يتحرك بأقصى سرعة عندما يمر بموضع إتزانه.*

# الوحدة الثالثة
# الاشتقاق

الدرس ٣.٧

(الجزء الاول)

اسم الدرس: اشتقاق الدوال الاسية واللوغاريتمية

# ايجاد معدل التغير لاستثمار معين

مثال

مثال

الحل

إذا كانت قيمة إستثمار معين هى 100 درهم إماراتى تتضاعف كل عام ، ستكون القيمة بعد $t$ عام محسوبة بإستخدم $v(t) = 100(2)^t$ أوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظى للتغير فى القيمة

$$v(t) = 100(2)^t$$ الاستثمار بعد $t$ عام :

$$v'(t) = 100\frac{d}{dt}[2^t]$$ المعدل اللحظى للتغير فى الاستثمار :

$$v'(t) = 100 \cdot 2^t \ln 2$$

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{100 \cdot 2^t \ln 2}{100(2)^t} = \ln 2 \approx 0.693$$ نسبة المعدل اللحظى للتغير

$0.693 \times 100 = 69.3\%$ per year النسبة المئوية للمعدل اللحظى للتغير

## إيجاد معدل التغير للتكاثر

مثال

يبدأ تكاثر البكتريا بالعدد 500 ويتضاعف كل أربعة أيام . أو جد قانوناً للتكاثر بعد t يوماً وأوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظى للتغير فى التكاثر .

الحل

التكاثر بعد $t$ عام :

$$f(t) = A_0(2)^{kt}$$

$$f(0) = 500$$

$$f(4) = 2 \times 500 = 1000$$

$$f(0) = A_0(2)^{k(0)}$$

$$500 = A_0(2)^0$$

$$A_0 = 500$$

$$f(t) = 500(2)^{kt}$$

$$f(4) = 500(2)^{k(4)}$$

$$1000 = 500(2)^{k(4)}$$

$$2 = (2)^{k(4)}$$

$$4k = 1 \quad then \quad k = \frac{1}{4}$$

التكاثر بعد $t$ عام :

$$f(t) = 500(2)^{\frac{1}{4}t}$$

المعدل اللحظى للتغير فى التكاثر

$$f'(t) = 500\frac{d}{dt}\left[(2)^{\frac{1}{4}t}\right]$$

$$f'(t) = 500 \cdot (2)^{\frac{1}{4}t} ln2 \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{4}t\right]$$

$$f'(t) = 500 \cdot (2)^{\frac{1}{4}t} ln2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$f'(t) = 125 \cdot (2)^{\frac{1}{4}t} ln2$$

نسبة المعدل اللحظى للتغير

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{125 \cdot (2)^{\frac{1}{4}t} ln2}{500(2)^{\frac{1}{4}t}} = \frac{1}{4} ln2 \approx 0.17329$$

النسبة المئوية للمعدل اللحظى للتغير

$$0.17329 \times 100 = 17.329\%$$

+٩٧١٥٦٦١٥١٩٨٨/
أ/ محمد طه

# إيجاد معدل التغير للتكاثر

مثال

يبدأ تكاثر البكتيريا بالعدد ٢٠٠ ويتضاعف ثلاثة مرات كل يوم . أوجد قانوناً للتكاثر بعد $t$ يوماً و أوجد النسبة المئوية للمعدل اللحظى للتغير فى التكاثر

الحل

التكاثر بعد $t$ عام :

$$f(t) = 200(3)^t$$

المعدل اللحظى للتغير فى التكاثر

$$f'(t) = 200\frac{d}{dt}[3^t]$$

$$f'(t) = 200 \cdot 3^t ln3$$

نسبة المعدل اللحظى للتغير

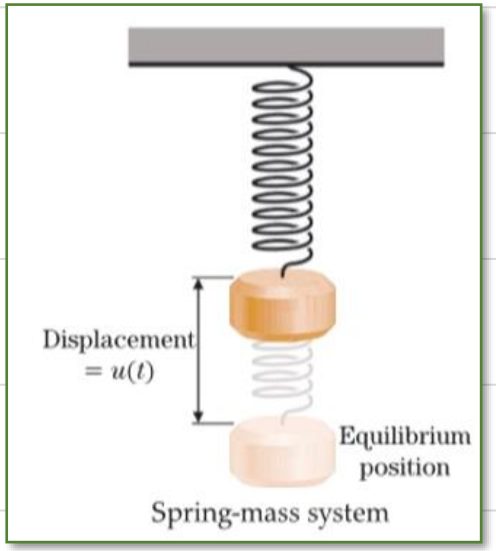
$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{200 \cdot 3^t ln3}{200(3)^t} = ln3 \approx 1.098612$$

النسبة المئوية للمعدل اللحظى للتغير

$1.098612 \times 100 = 109.8612\%$ per day

# إيجاد السرعة المتجهة لكتلة معلقة بزنبرك

## في نظام الزنبرك المعلق




الازاحة الرأسية في الزمن t للكتلة المعلقة من زنبرك معين يمكن وصفها باستخدام

$$u(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

حيث A, B, و $\omega$ ثوابت.

إذا صممنا مضائلة ( أي مقاومة للحركة بسبب الاحتكاك )

$$u(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t) + Be^{-\alpha t}\sin(\omega t)$$

حيث A, B, $\alpha$, و $\omega$ ثوابت.

لكل من دالتي الازاحة $u_1 = e^{-t}\cos t$ , $u_2(t) = e^{-\frac{t}{6}}\cos(4t)$

ارسم تمثيلا بيانيا لحركة الثقل واحسب السرعة المتجهة عند أي زمن t

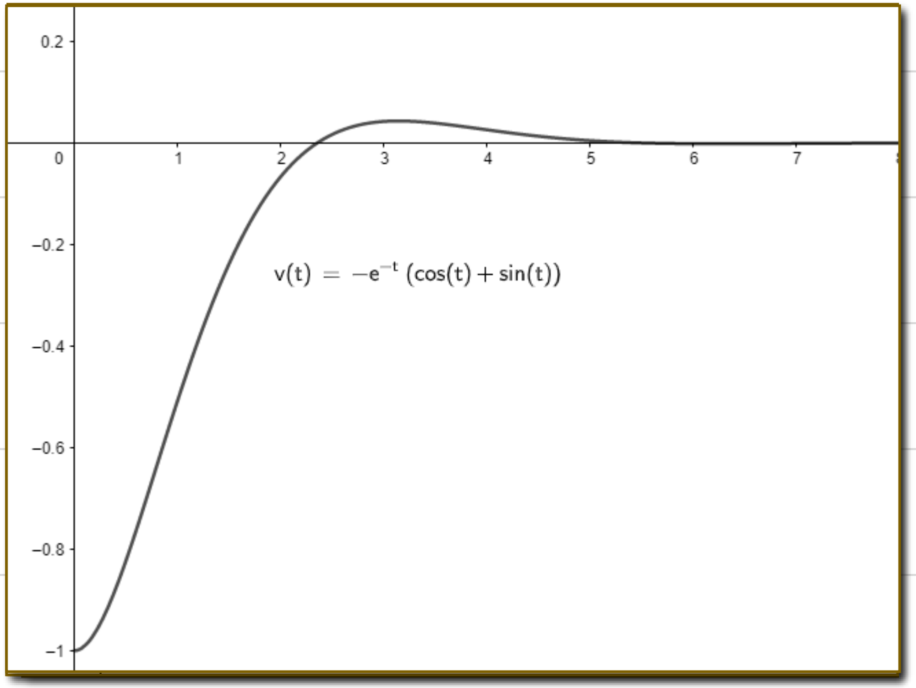
$$u_1(t) = e^{-t}\cos t$$

$$u_1'(t) = \frac{d}{dt}[e^{-t}]\cdot \cos t + e^{-t}\cdot\frac{d}{dt}[\cos t]$$

$$u_1'(t) = e^{-t}\frac{d}{dt}[-t]\cdot \cos t + e^{-t}\cdot(-\sin t)$$

$$u_1'(t) = -e^{-t}\cdot \cos t + e^{-t}\cdot(-\sin t)$$

$$v_1(t) = u_1'(t) = -e^{-t}(\cos t + \sin t)$$




لاحظ ان الكتلة تتذبذب لكنها تقترب من السكون $u(t) = 0$

رغم ان التمثيل البياني يستمر في التذبذب لكنها ذبذبات بسيطة جدا يصعب ملاحظتها

عند $t > 5$

# إيجاد السرعة المتجهة لكتلة معلقة بزنبرك

مثال

Q55 :صفحة 196 :

يتم وصف حركة زنبرك معين بإستخدام $f(t) = e^{-t}cost$ احسب السرعة المتجهة فى الزمن $t$ ارسم دالة السرعة المتجهة متى تكون السرعة المتجهة صفراً ؟
وما موقع الزنبرك عندما تكون سرعته المتجهة صفراً ؟

الحل

$f(t) = e^{-t}cost$ الازاحة

$v(t) = f'(t) = \frac{d}{dt}[e^{-t}] \cdot cost + e^{-t} \cdot \frac{d}{dt}[cost]$ السرعة

$v(t) = e^{-t} \cdot \frac{d}{dt}[-t] \cdot cost + e^{-t} \cdot (-sint)$

$v(t) = e^{-t} \cdot (-1) \cdot cost + e^{-t} \cdot (-sint)$

$$\boxed{v(t) = -e^{-t}(cost + sint)}$$

$v(t) = -e^{-t}(cost + sint) = 0$ إذن السرعة $= 0$

$\cancel{-e^{-t} = 0}$ or $\quad cost + sint = 0$

$e^{-t} > 0$ or $\quad sint = -cost \longrightarrow tant = -1$

$t = \pi - \frac{\pi}{4} + n\pi = \frac{3\pi}{4} + n\pi$ الربع الثاني

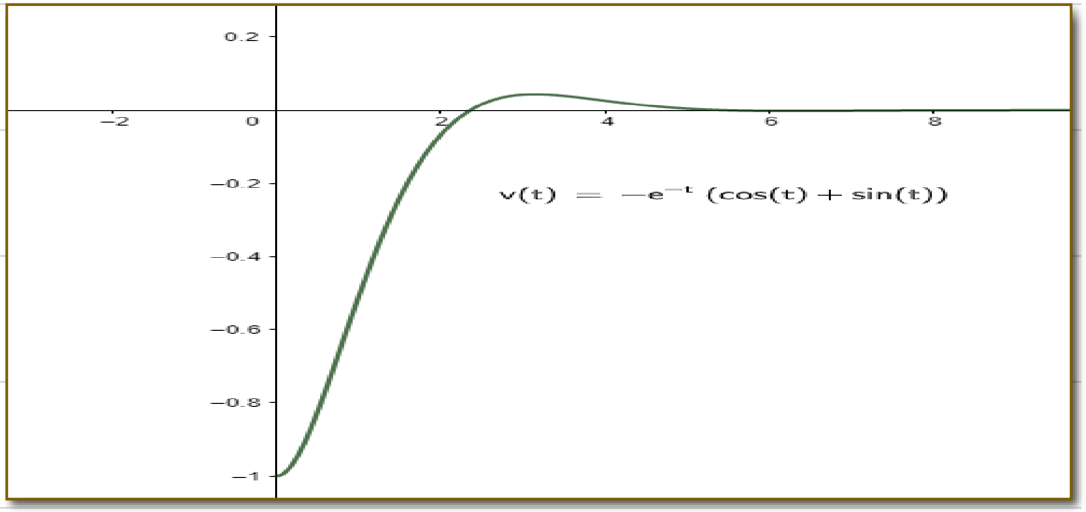
$t = 2\pi - \frac{\pi}{4} + n\pi = \frac{7\pi}{4} + n\pi$ الربع الرابع

$$\boxed{t = \frac{3\pi}{4} + n\pi \quad n = 0,1,2,3,\ldots}$$

$f(t) = e^{-t}cost$ الموقع عند السرعة = ٠

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{-\frac{3\pi}{4}}cos\frac{3\pi}{4} = -0.06702$ الموضع عند $t = \frac{3\pi}{4} + n\pi$

$f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = e^{-\frac{7\pi}{4}}cos\frac{7\pi}{4} = 2.8962 \times 10^{-3}$



# إيجاد السرعة المتجهة لكتلة معلقة بزنبرك

مثال

Q56 :صفحة 196 :

يتم وصف حركة زنبرك معين بإستخدام $f(t) = e^{-2t}\sin 3t$ احسب السرعة المتجهة فى الزمن $t$ وارسم دالة السرعة المتجهة متى تكون السرعة المتجهة صفراً ؟ وما موقع الزنبرك عندما تكون سرعته المتجهة صفراً ؟

الحل

الازاحة

$$f(t) = e^{-2t}\sin 3t$$

السرعة

$$v(t) = f'(t) = \frac{d}{dt}[e^{-2t}]\cdot \sin 3t + e^{-2t}\cdot\frac{d}{dt}[\sin 3t]$$

$$v(t) = e^{-2t}\cdot\frac{d}{dt}[-2t]\cdot \sin 3t + e^{-2t}\cdot\cos 3t\cdot\frac{d}{dt}[3t]$$

$$v(t) = e^{-2t}\cdot(-2)\cdot\sin 3t + e^{-2t}\cdot\cos 3t\cdot(3)$$

$$\boxed{v(t) = -e^{-2t}(2\sin 3t - 3\cos 3t)}$$

إذن السرعة $= 0$

$$v(t) = -e^{-2t}(2\sin 3t - 3\cos 3t) = 0$$

$$\cancel{-e^{-2t} = 0} \quad or \quad 2\sin 3t - 3\cos 3t = 0$$

$$e^{-2t} > 0 \text{ or } \quad 2\sin 3t = 3\cos 3t \longrightarrow \tan 3t = \frac{3}{2} \text{ then } \quad 3t = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)$$

الربع الاول

$$3t = \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) + n\pi$$

الربع الثالث

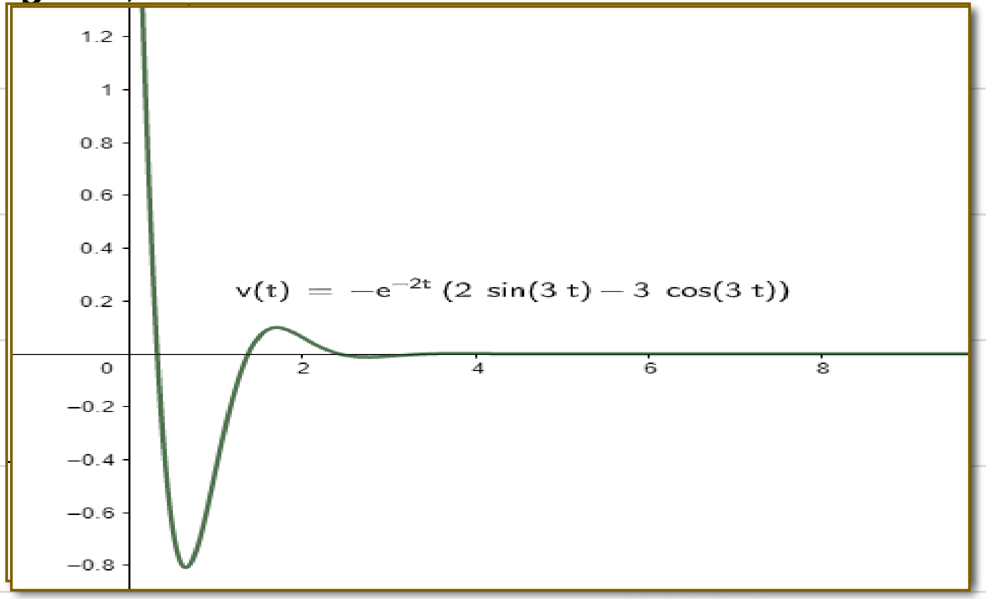
$$3t = \pi + \tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) + n\pi$$

$$\boxed{t = \frac{\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) + n\pi}{3} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots}$$

الموقع عند السرعة = ٠

$$f(t) = e^{-2t}\sin 3t$$

$$f\left(\frac{\tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)}{3}\right) = f(0.32759) = 0.43212$$



# تحليل تركيز مادة كيميائية

مثال

يتم تحديد التركيز Cلمادة كيميائية معينة بعد t ثانية (ثوان) من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t)=\frac{10}{9_e-20t+1}$ بين ان $c'(t)>0$
واستخدم هذه المعلومات للتأكيد على أن تركيز المركب الكيميائي لا يتخطى ١٠

الحل

كلا من البسط والمقام موجب لجميع قيم t

$$c'(t)=\frac{1800e^{-20t}}{(9e^{-20t}+1)^2}$$

- مشتقة الدالة $c(t)$ موجبة
- وهذا يعني أن تركيزالمادة يزداد
- لكن يظل التركيز أقل من قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty} c(t)$

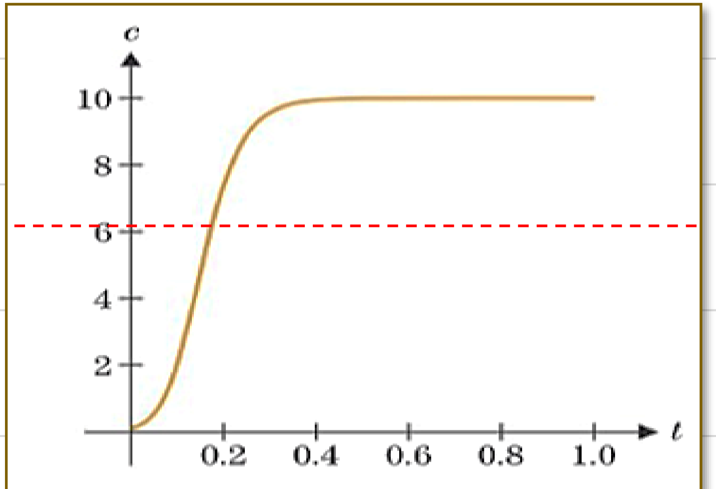
$$c'(t)=\frac{1800e^{-20t}}{(9e^{-20t}+1)^2}>0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{10}{9e^{-20t}+1}\right)=$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{10}{\frac{9}{e^{20t}}+1}\right)=$$

$$=\frac{10}{\frac{9}{\infty}+1}=\frac{10}{0+1}=10$$

تركيز المركب الكيميائي لن يتخطى ١٠



Chemical concentration

خطا تقارب أفقي: $y=10$ :

نمو لوغاريتمي

$$c(t)=\frac{10}{9e^{-20t}+1}$$

أعد صياغة الدالة

$$c(t)=10(9e^{-20t}+1)^{-1}$$

باستخدام قاعدة السلسلة

$$c'(t)=10\cdot-1(9e^{-20t}+1)^{-2}\cdot\frac{d}{dx}[9e^{-20t}+1]$$

$$c'(t)=10\cdot-1(9e^{-20t}+1)^{-2}\cdot\left(\frac{d}{dx}[9e^{-20t}]+\frac{d}{dx}[1]\right)$$

باستخدام قاعدة السلسلة

$$c'(t)=-10(9e^{-20t}+1)^{-2}\quad\cdot 9e^{-20t}\quad\cdot\frac{d}{dx}[-20t]$$

$$c'(t)=-10\left(9e^{-20t}+1\right)^{-2}\cdot 9e^{-20t}(-20)$$

Thursday, October 24, 2024

# تحليل تركيز مادة كيميائية

مثال

يتم تحديد التركيز مادة كيميائية معينة بعد t ثانية (ثوان) من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t) = \frac{10}{9_e{-10t+2}}$ بين ان $c'(t) > 0$
واستخدم هذه المعلومات للتأكيد على أن تركيز المركب الكيميائي لا يتخطى 5

الحل

نمو لوغاريتمي

$$c(t) = \frac{10}{9e^{-10t} + 2}$$

أعد صياغة الدالة

$$c(t) = 10(9e^{-10t} + 2)^{-1}$$

باستخدام قاعدة السلسلة

$$c'(t) = 10 \cdot -1(9e^{-10t} + 2)^{-2} \cdot \frac{d}{dx}[9e^{-10t} + 2]$$

$$c'(t) = -10(9e^{-10t} + 2)^{-2} \cdot \left(\frac{d}{dx}[9e^{-10t}] + \frac{d}{dx}[2]\right)$$

باستخدام قاعدة السلسلة

$$c'(t) = -10\left(9e^{-10t} + 2\right)^{-2} \cdot 9e^{-10t} \cdot \frac{d}{dx}[-10t]$$

$$c'(t) = -10\left(9e^{-20t} + 2\right)^{-2} \cdot 9e^{-10t}(-10)$$

$$c'(t) = \frac{900e^{-10t}}{(9e^{-10t} + 2)^2}$$

كلا من البسط والمقام موجب لجميع قيم $t$

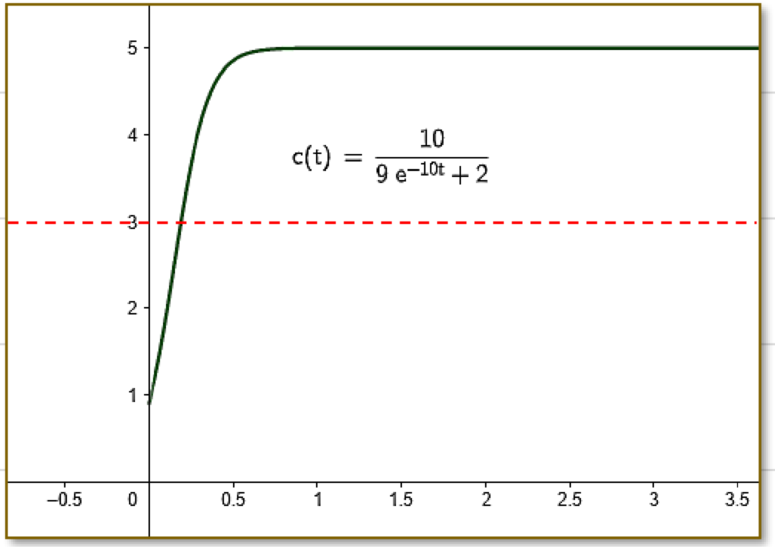
- مشتقة الدالة $c(t)$ موجبة
- وهذا يعني أن تركيزالمادة يزداد
- لكن يظل التركيز أقل من قيمة النهاية $\lim_{x\to\infty} c(t)$

$$c'(t) = \frac{900e^{-10t}}{(9e^{-10t} + 2)^2} > 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{10}{9e^{-10t} + 2}\right) =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{10}{\frac{9}{e^{10t}} + 2}\right)$$

$$= \frac{10}{\frac{9}{\infty} + 2} = \frac{10}{0 + 2} = 5$$




تركيز المركب الكيميائي لن يتخطى ٥

خطا تقارب أفقي: $y = 5$ :

+٩٧١٥٦٦١٥١٩٨٨/
أ/ محمد طه

# تحليل تركيز مادة كيميائية

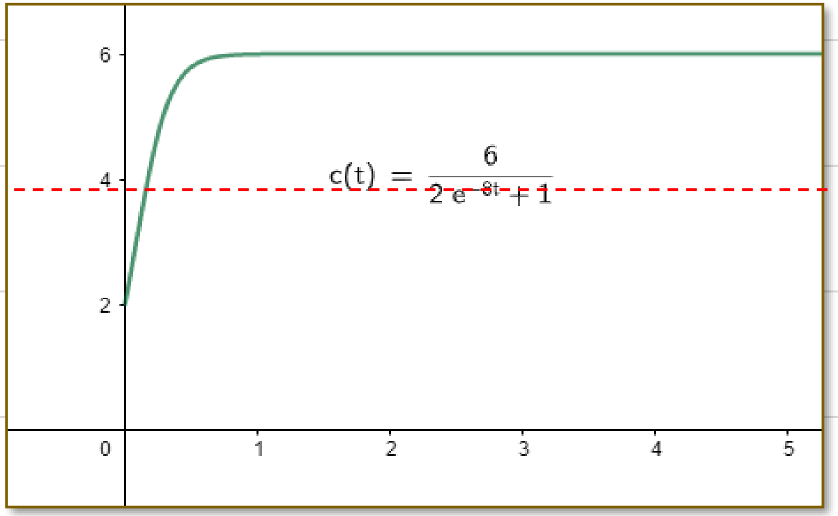
**مثال**

يتم تحديد التركيز مادة كيميائية معينة بعد t ثانية (ثوان) من التفاعل ذاتي التحفيز باستخدام $c(t)=\frac{6}{2e^{-8t}+1}$ بين ان $c'(t)>0$ واستخدم هذه المعلومات للتأكيد على أن تركيز المركب الكيميائي لا يتخطى 6 ابدًا

**الحل**

كلا من البسط والمقام موجب لجميع قيم t

- مشتقة الدالة $c(t)$ موجبة
- وهذا يعني أن تركيزالمادة يزداد
- لكن يظل التركيز أقل من قيمة النهاية $\lim\limits_{x\to\infty} c(t)$




$$c'(t)=\frac{96e^{-8t}}{(2e^{-8t}+1)^2}$$

$$c'(t)=\frac{96e^{-8t}}{(2e^{-8t}+1)^2}>0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{2e^{-8t}+1}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{6}{\frac{2}{e^{8t}}+1}\right)$$

$$=\frac{6}{\frac{2}{\infty}+1}=\frac{6}{0+1}=6$$

تركيز المركب الكيميائي لن يتخطى ٦

خطا تقارب أفقي: $y=$٦ :

نمو لوغاريتمي

$$c(t)=\frac{6}{2e^{-8t}+1}$$

أعد صياغة الدالة

باستخدام قاعدة السلسلة

$$c(t)=6(2e^{-8t}+1)^{-1}$$

$$c'(t)=6\cdot-1(2e^{-8t}+1)^{-2}\cdot\frac{d}{dx}[2e^{-8t}+1]$$

$$c'(t)=-6(2e^{-8t}+1)^{-2}\cdot\left(\frac{d}{dx}[2e^{-8t}]+\frac{d}{dx}[1]\right)$$

باستخدام قاعدة السلسلة

$$c'(t)=-6(2e^{-8t}+1)^{-2}\cdot\ 2e^{-8t}\cdot\frac{d}{dx}[-8t]$$

$$c'(t)=-6\left(2e^{-8t}+1\right)^{-2}\cdot2e^{-8t}(-8)$$

# الوحدة الثالثة
# الإشتقاق

الدرس الثامن(٨)

## اسم الدرس

الإشتقاق الضمني والدوال المثلثية العكسية.

# نمذجة معدل التغير في نظر لاعب الكرة

**مثال 8.6 :صفحة202 :**

من أهم المبادئ الإرشادية لمعظم الرياضات هو " إبقاء النظر إلى الكرة". في البيسبول يقف ضارب الكرة على بعد قدمين من اللوح الرئيس بينما يتم إلقاء رمية بسرعة متجهة تصل إلى *130ft/s* حوالي *90 mph* على فرض أن الكرة تتحرك أفقيا فقط، ما المعدل الذي تحتاج زاوية نظر ضارب الكرة أن تتغير به لمتابعة الكرة بينما تغير اللوح الرئيس؟

**الحل**

$d$: المسافة من الكرة ألى اللوح        تتغير بسرعة $130ft/s$

$d'(t) = -130ft/s$   الإشارة السالبة  تشير إلى تناقص المسافة مع تحرك الكرة نحو لوح البداية

$\theta$: الزاوية

$$\theta(t) = tan^{-1}\left[\frac{d(t)}{2}\right]$$

معدل تغير الزاوية

$$\theta'(t) = \frac{d}{dt}\left(tan^{-1}\left[\frac{d(t)}{2}\right]\right)$$

$$\theta'(t) = \frac{1}{1+\left[\frac{d(t)}{2}\right]^2}\cdot\frac{d'(t)}{2}$$

$$\theta'(t) = \frac{d'(t)}{2\left(1+\frac{[d(t)]^2}{4}\right)}$$

$$\theta'(t) = \frac{d'(t)}{2+\frac{[d(t)]^2}{2}} = \frac{d'(t)}{\frac{4}{2}+\frac{[d(t)]^2}{2}} = \frac{2d'(t)}{4+[d(t)]^2}$$

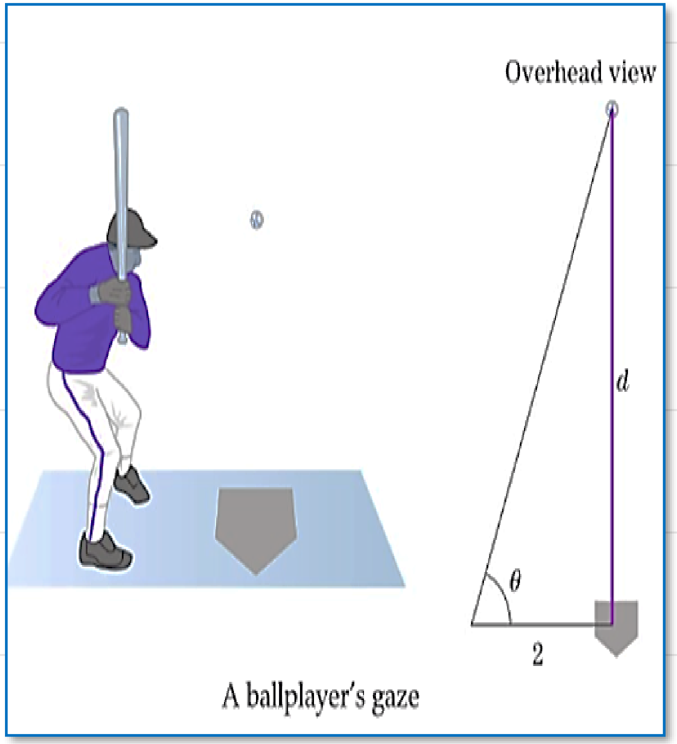
الثانية/راديان

عندما تعبر الكرة اللوح     $d(t) = 0$

$$\theta'(t) = \frac{2(-130}{4+[0]^2} = -65$$ الثانية/راديان

مراقبة الكرة أمر مستحيل جسديًا.

يستطيع معظم البشر تتبع الأشياء فقط بمعدل 3 الثانية/ راديان



A ballplayer's gaze

أ/ محمد طه
+٩٧١٥٦٦١٥١٩٨٨/

# نمذجة معدل التغير في نظر لاعب الكرة

تدريب Q38 :صفحة204 :

يقف الضارب على بعد $x$ قدم من اللوح الرئيسي أثناء رمي الرمية بسرعة $130ft/s$ (حوالي $90\ mph$). بافتراض أن الكرة تتحرك أفقيًا فقط، ما المسافة التي سيحتاجها اللاعب للوقوف بعيدًا عن لوح البداية لتتبع الكرة على طول الطريق؟

الحل

$d$: المسافة من الكرة ألى اللوح تتغير بسرعة $130ft/s$

$$d'(t) = -130ft/s$$

الإشارة السالبة تشير إلى تناقص المسافة مع تحرك الكرة نحو لوح البداية

$\theta$: الزاوية

$$\theta(t) = tan^{-1}\left[\frac{d(t)}{x}\right]$$

معدل تغير الزاوية :

$$\theta'(t) = \frac{d}{dt}\left(tan^{-1}\left[\frac{d(t)}{x}\right]\right)$$

$$\theta'(t) = \frac{1}{1+\left[\frac{d(t)}{x}\right]^2}\cdot\frac{d'(t)}{x}$$

$$\theta'(t) = \frac{d'(t)}{x\left(1+\frac{[d(t)]^2}{x^2}\right)}$$

$x$: المسافة بين الضارب واللوح (لا تتغير)

$$\theta'(t) = \frac{d'(t)}{x+\frac{[d(t)]^2}{x}} = \frac{d'(t)}{\frac{x^2}{x}+\frac{[d(t)]^2}{x}} = \frac{xd'(t)}{x^2+[d(t)]^2}$$

الثانية/راديان

عندما تعبر الكرة لوح المرمى $d(t)=0$ (قيمة عظمى) $\theta'(t)$

$$\theta'(t) = \frac{x(-130)}{x^2+[0]^2} = \frac{(-130)}{x}$$

يستطيع معظم البشر تتبع الأشياء بمعدل 3 الثانية/راديان

$$\frac{(-130)}{x} = -3$$ الثانية/راديان

$$x = 43.33ft$$

العلامة السالبة تشير إلى تناقص زاوية النظر